प्रकाश का व्यतिकरण (Interference of Light)

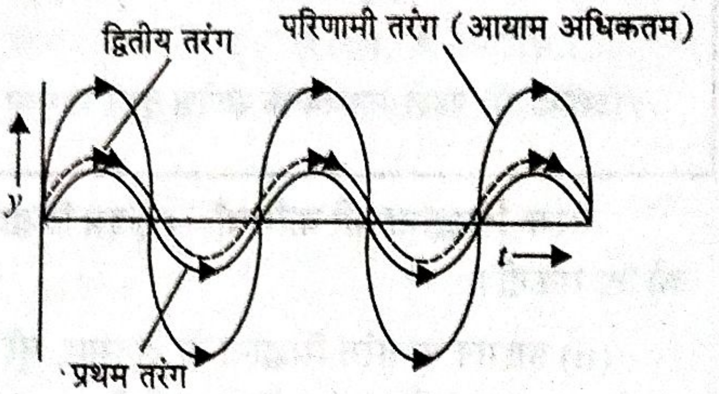
जब समान आवृत्ति और लगभग समान आयाम की दो प्रकाश तरंगें किसी माध्यम में एक साथ एक ही दिशा में गमन करती हैं तो अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार परिणामी तरंग का निर्माण करती हैं। परिणामी तरंग का आयाम मूल तरंगों के आयाम से भिन्न होता है। चूँकि **प्रकाश की तीव्रता आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है**, अतः प्रकाश की तीव्रता में परिवर्तन हो जाता है। कुछ स्थानों पर प्रकाश की तीव्रता अधिकतम, कुछ स्थानों पर न्यूनतम अथवा शून्य होती है। इस घटना को प्रकाश का व्यतिकरण कहते हैं।

अतः जब समान आवृत्ति की दो प्रकाश तरंगें किसी माध्यम में एक ही दिशा में गमन करती हैं तो उनके अध्यारोपण के फलस्वरूप प्रकाश की तीव्रता में परिवर्तन हो जाता है । इस घटना को प्रकाश का व्यतिकरण कहते हैं।

व्यतिकरण दो प्रकार के होते हैं—

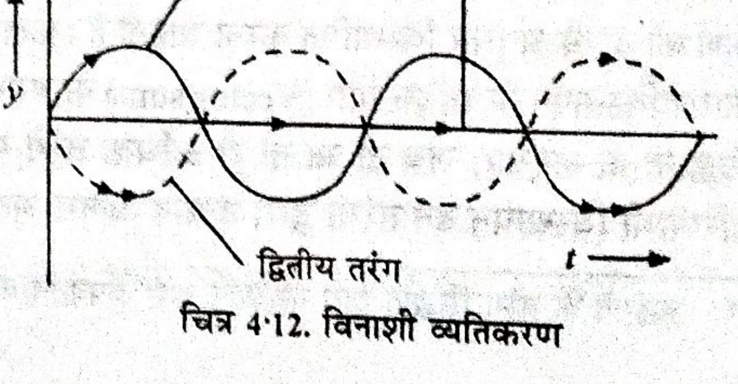
(i) संपोषी व्यतिकरण और (ii) विनाशी व्यतिकरण।

(i) संपोषी व्यतिकरण (Constructive Interference)—माध्यम के जिस बिन्दु पर दोनों तरंगें समान कला में मिलती हैं अर्थात् दोनों तरंगों के श्रृंग या गर्त एक साथ पड़ते हैं, उस बिन्दु पर दोनों तरंगें एक-दूसरे के प्रभाव को बढ़ाती हैं। अतः प्रकाश की परिणामी तीव्रता अधिकतम होती है। इस प्रकार के व्यतिकरण को संपोषी व्यतिकरण कहते हैं।



चित्र 4·11. संपोषी व्यतिकरण

(ii) विनाशी व्यतिकरण (Destructive Interference)—माध्यम के जिस बिन्दु पर दोनों तरंगें विपरीत कला में मिलती हैं अर्थात् एक तरंग के श्रृंग पर दूसरी तरंग का गर्त या एक तरंग के गर्त पर दूसरी तरंग का श्रृंग पड़ता है, उस बिन्दु पर दोनों तरंगें एक-दूसरे के प्रभाव को नष्ट कर देती हैं। अतः उस बिन्दु पर प्रकाश की परिणामी तीव्रता न्यूनतम या शून्य होती है। इस प्रकार के व्यतिकरण को विनाशी व्यतिकरण कहते हैं।



चित्र 4·12. विनाशी व्यतिकरण

गणितीय व्याख्या (Mathematical Interpretation)—चित्र 4·12 के अनुसार, मानलो समान आवृत्ति की दो तरंगें किसी माध्यम में एक ही दिशा में गमन कर रही हैं। उनके आयाम a_1 और a_2 हैं। दोनों तरंगों के गणितीय समीकरण निम्न हैं—

$$y_1 = a_1 \sin \omega t \quad \ldots(1)$$

$$y_2 = a_2 \sin (\omega t + \phi) \quad \ldots(2)$$

जहाँ ϕ दोनों तरंगों का कलान्तर (Phase difference) है।

प्रत्येक तरंग की आवृत्ति $\upsilon = \dfrac{\omega}{2\pi}$

जहाँ ω तरंगों की कोणीय-आवृत्ति है।

यदि दोनों तरंगें माध्यम के किसी बिन्दु पर एक साथ पहुँचें तो अध्यारोपण के सिद्धान्त से,

परिणामी आयाम $\quad y = y_1 + y_2$

$$y = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin (\omega t + \phi)$$

या $\quad y = a_1 \sin \omega t + a_2 \{ \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi\}$

या $\quad y = (a_1 + a_2 \cos \phi) \sin \omega t + a_2 \sin \phi \cos \omega t$

या $\quad y = \text{R} \cos \theta \sin \omega t + \text{R} \sin \theta \cos \omega t \quad \ldots(3)$

जहाँ $\quad \text{R} \cos \theta = a_1 + a_2 \cos \phi \quad \ldots(4)$

तथा $\quad \text{R} \sin \theta = a_2 \sin \phi \quad \ldots(5)$

R और θ अन्य नियतांक हैं। समीकरण (3) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$y = \text{R} \sin (\omega t + \theta) \quad \ldots(6)$$

समीकरण (6) परिणामी विस्थापन को प्रदर्शित करता है जिसका स्वरूप अध्यारोपित तरंगों के समान ही है। अत: R परिणामी आयाम होगा।

अब समीकरण (4) और (5) को वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\text{R}^2 \cos^2 \theta + \text{R}^2 \sin^2 \theta = (a_1 + a_2 \cos \phi)^2 + (a_2 \sin \phi)^2$$

या $\quad \text{R}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a_1^2 + 2a_1a_2 \cos \phi + a_2^2 \cos^2 \phi + a_2^2 \sin^2 \phi$

या $\quad \text{R}^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 \cos \phi + a_2^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$

या $\quad \text{R}^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 \cos \phi + a_2^2, \quad [\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1]$

या $\quad \text{R}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \phi$

या $\quad \text{R} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \phi} \quad \ldots(7)$

चूँकि तीव्रता आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है, अत: परिणामी तीव्रता

$$\text{I} \propto \text{R}^2$$

या $\quad \text{I} = k\text{R}^2$

या $\quad \text{I} = k(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \phi)$

जहाँ k एक आनुपातिक नियतांक है।

या $\quad \text{I} = \text{I}_1 + \text{I}_2 + 2ka_1a_2 \cos \phi \quad \ldots(8)$

जहाँ $\quad \text{I}_1 = ka_1^2 =$ पहली तरंग के कारण तीव्रता

तथा $\quad \text{I}_2 = ka_2^2 =$ दूसरी तरंग के कारण तीव्रता

समीकरण (7) और (8) से स्पष्ट है कि किसी बिन्दु पर परिणामी आयाम और तीव्रता अध्यारोपित होने वाली प्रकाश-तरंगों के कलान्तर ϕ पर निर्भर करते हैं।

विशेष स्थितियाँ—

स्थिति I. जब दोनों तरंगें समान कला में हों—इस स्थिति में

$$\phi = 2\pi n$$

नोट : यदि $a_1 = a_2 = a$ हो तो समीकरण (7) से, $R = \sqrt{2a^2(1+\cos\phi)}$

$$= a\sqrt{2(2\cos^2 \theta/2)} = 2a\cos\frac{\phi}{2}$$

अत: $$I = kR^2 = 4ka^2\cos^2\frac{\phi}{2} = 4I\phi\cos^2\frac{\phi}{2} = 4I_0\cos^2\frac{\phi}{2}.$$

जहाँ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

अर्थात् $$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots \quad (\pi \text{ का समगुणक})$$

अत: $$\cos\phi = \cos 2\pi n = +1$$

समीकरण (7) में $\cos\phi$ का मान रखने पर,

$$R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2} = \sqrt{(a_1+a_2)^2}$$

या $$R = a_1 + a_2 \qquad \ldots(9)$$

अर्थात् **इस स्थिति में परिणामी आयाम, दोनों तरंगों के आयाम के योग के तुल्य होता है।**

समीकरण (8) में ϕ का मान रखने पर,

$$I = I_1 + I_2 + 2ka_1a_2 \qquad \ldots(10)$$

या $$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$

$\therefore$ $$I > I_1 + I_2$$

अत: किसी बिन्दु पर पहुँचने वाली दोनों तरंगों के मध्य कलान्तर शून्य या π का समगुणक होने पर उस बिन्दु पर परिणामी आयाम प्रत्येक तरंग के आयाम के योगफल के बराबर होता है तथा परिणामी तीव्रता प्रत्येक तरंग की तीव्रता के योगफल से अधिक होती है। यही संपोषी व्यतिकरण की स्थिति होती है।

अब $$\text{कलान्तर} = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{पथान्तर}, \ (\text{जहाँ } \lambda = \text{तरंगदैर्घ्य})$$

या $$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \times \Delta \ \text{ या } \ \Delta = \frac{\lambda}{2\pi}\phi$$

अधिकतम तीव्रता या संपोषी व्यतिकरण के लिए $\phi = 2\pi n$ मान रखने पर,

$$\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} \times 2\pi n$$

या $$\Delta = n\lambda$$

या $$\Delta = 2n.\frac{\lambda}{2}$$

अत: व्यतिकरण करने वाली दोनों तरंगों के मध्य पथान्तर शून्य या $\frac{\lambda}{2}$ का समगुणक होने पर परिणामी आयाम प्रत्येक तरंग के आयाम के योगफल के बराबर होता है तथा परिणामी तीव्रता प्रत्येक तरंग की तीव्रता के योगफल से अधिक होती है।

अत: जब समान आवृत्ति की दो तरंगें समान कला में अध्यारोपित होती हैं तो संपोषी व्यतिकरण उत्पन्न होता है। यदि दोनों तरंगों के आयाम समान हों तो

$$a_1 = a_2 = a \ (\text{मानलो})$$

अत: अधिकतम आयाम $R_{max} = a + a = 2a$, [समीकरण (9) से]

तथा अधिकतम तीव्रता $$I_{max} = I + I + 2ka^2$$
$$= I + I + 2I = 4I$$

अर्थात्, **समान आयाम एवं आवृत्ति के दो तरंगों के व्यतिकरण से प्राप्त परिणामी तरंग की तीव्रता किसी एक तरंग की तीव्रता की चार गुनी होती है ।**

स्थिति II. जब दोनों तरंगें विपरीत कला में हों—इस स्थिति में

$$\phi = (2n-1)\,\pi$$

जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots$

अर्थात्
$$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots\ldots \qquad (\pi \text{ का विषम गुणांक})$$

अत:
$$\cos\phi = \cos(2n-1)\pi = -1$$

समीकरण (7) में मान रखने पर,

$$R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2}$$
$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2}$$

या
$$R = a_1 - a_2 \qquad \ldots(11)$$

समीकरण (8) में रखने पर,

$$I = I_1 + I_2 - 2ka_1a_2$$
$$= I_1 + I_2 - 2\sqrt{ka_1}\,.\sqrt{ka_2}$$
$$= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$$

अत:
$$I < I_1 + I_2 \qquad \ldots(12)$$

समीकरण (11) एवं (12) से स्पष्ट है कि **जब व्यतिकरण उत्पन्न करने वाली दोनों तरंगों का कलान्तर π का विषम गुणक होता है तो परिणामी आयाम प्रत्येक तरंग के आयाम के अन्तर के बराबर होता है तथा परिणामी तीव्रता प्रत्येक तरंग की तीव्रता के योगफल से कम होती है।**

अब पथान्तर
$$\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} \times \phi$$

या
$$\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} \times (2n-1)\pi, \qquad [\because \phi = (2n-1)\,\pi]$$

या
$$\Delta = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$$

अत: **किसी बिन्दु पर पहुँचने वाली दो तरंगों के मध्य कलान्तर $\lambda/2$ का विषम गुणक होने पर उस बिन्दु पर परिणामी आयाम प्रत्येक तरंग के आयाम के बराबर अर्थात् न्यूनतम होता है।** स्पष्टत: उस बिन्दु पर तीव्रता न्यूनतम होगी।

यदि दोनों तरंगों के आयाम बराबर हैं अर्थात् $a_1 = a_2$ तो

$$R_{min} = 0 \text{ तथा } I_{min} = 0$$

अर्थात् परिणामी तीव्रता शून्य होगी। यही विनाशी व्यतिकरण है। अत: **जब समान आवृत्ति की दो तरंगें विपरीत कला में अध्यारोपित होती हैं तो विनाशी व्यतिकरण उत्पन्न होता है।**

नोट : (i) यदि व्यतिकरण की घटना में दीप्त फ्रिन्जों की तीव्रता I_{max} एवं अदीप्त फ्रिंजों की तीव्रता I_{min} हो तो

$$I_{max} \propto R_{max}{}^2 \text{ या } I_{max} \propto (a_1 + a_2)^2$$

तथा
$$I_{min} \propto R_{min}{}^2 \text{ या } I_{min} \propto (a_1 - a_2)^2$$

$\therefore$
$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2} = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)^2.$$

(ii) किसी स्लिट से निकलने वाले प्रकाश की तीव्रता उस स्लिट की चौड़ाई के अनुक्रमानुपाती होती है। यदि दो

स्लिटों की चौड़ाइयाँ क्रमशः w_1 व w_2 हों तथा उनसे निकलने वाली प्रकाश तरंगों की तीव्रता क्रमशः I_1 व I_2 हो तो

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{I_1}{I_2}.$$

परन्तु

$$I \propto a^2$$

अतः

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$